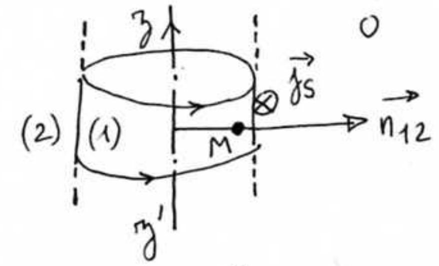
Corrigé de II et Barème

1. Tout plan perpendiculaire à $z'z$ est plan de symétrie de la source de champ magnétique donc $\vec{B}(M)$ lui est perpendiculaire $\Rightarrow$ $\vec{B}(M) // z'z$.

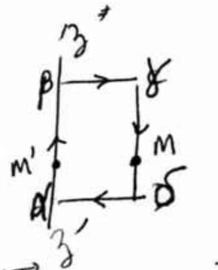
2.a. $\vec{n}_{12} \times (\underbrace{\vec{B}_2}_{0} - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j_s} \Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{n}_{12} \times \mu_0 \vec{j_s} = \vec{B}_0(M)$



(1) → intérieur
(2) → extérieur

$\vec{B}_0(M) = \mu_0 j_s \vec{e}_z$

2.b. On choisit un contour :



CD est proche de la paroi, donc $\vec{B}_{CD} = \vec{B}_0(M)$

$$\int_{ABCD} \vec{B}.\vec{dl} = \underbrace{\int_{\alpha\beta} \vec{B}.\vec{dl}}_{B\cdot(\alpha\beta)} + \underbrace{\int_{\beta\gamma} \vec{B}.\vec{dl}}_{0} + \underbrace{\int_{\gamma\delta} \vec{B}\vec{dl}}_{-B_0(M)(\alpha\beta)} + \underbrace{\int_{\delta\alpha} \vec{B}.\vec{dl}}_{0} = \mu_0 I_{int.} = 0$$

D'où $B(M') = B_0(M)$ $\forall$ M' intérieur.

Le contour est choisi à l'intérieur du cylindre, donc il n'y a pas de courant intérieur au contour.

3. L'expression en champ lentement variable est identique au régime statique.

4. $\vec{B}_0(\vec{r},t) = \mu_0 j_s(t) \vec{e}_z = \mu_0 J_S \cdot \cos\omega t \ \vec{e}_z$

$\text{Rot } \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}$ où $\vec{E}_1 = E_{1\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$ et $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$

$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_1) = \mu_0 J_S \omega \sin\omega t$; multiplions les 2 membres par ρ et intégrons par rapport à ρ : $\rho E_1 = \mu_0 J_S \frac{\rho^2}{2} \omega \sin\omega t$

(pas de constante d'intégration car $E_1(\rho = 0) = 0$).

D'où $\vec{E}_1(\rho, t) = \frac{1}{2} \mu_0 J_S \omega \rho \sin\omega t$

[Remarque : on peut écrire / accepter $e = \int_{\substack{\text{cercle d'axe } zz' \\ \text{et de rayon } \rho}} \vec{E}_1 \vec{dl} = -\frac{d}{dt}(\pi \rho^2 . B_0)$

$\Rightarrow 2\pi \rho E_1 = \pi \rho^2 \mu_0 J_S \omega \sin\omega t$

ce qui donne le même résultat. Les deux écritures sont équivalentes.]

5. $\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{B_2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{E_1}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{2}\mu_0 J_s \omega^2 \rho \cos\omega t \cdot \vec{e_\varphi}$

soit $-\frac{\partial B_2}{\partial \rho} = \frac{1}{2c^2}\mu_0 J_s \omega^2 \rho \cos\omega t$

Compte tenu de la symétrie, $\vec{B_2}$ est dirigé selon $\vec{e_z}$.

$\overrightarrow{B_2} = -\frac{\rho^2\omega^2}{4c^2}\overrightarrow{B_0}$

6. a) $e_m(\rho,t) = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 J_s^2 \cos^2\omega t$

$\langle e_m \rangle_T = \frac{1}{2}\mu_0 J_s^2 \underbrace{\langle \cos^2\omega t\rangle_T}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\mu_0 J_s^2$

b) $e_e(\rho,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}\mu_0 J_s \omega \rho \sin\omega t\right)^2$

$e_e(\rho,t) = \frac{1}{8}\varepsilon_0\mu_0^2 J_s^2\omega^2\rho^2\sin^2\omega t \Rightarrow \langle e_e\rangle_T = \frac{1}{16}\frac{\mu_0}{c^2}J_s^2\omega^2\rho^2$

c) $\langle E_m\rangle_T = \int_{\ell=0}^{1}\int_{\rho=0}^{a} 2\pi\rho\, d\rho\, d\ell\, \langle e_m\rangle_T = \frac{1}{4}\mu_0 J_s^2 \cdot \pi a^2 = \frac{\pi}{4}\mu_0 J_s^2 a^2$

d) $\langle E_e\rangle_T = \int_{\ell=0}^{1}\int_{\rho=0}^{a} 2\pi\rho\, d\rho\, d\ell\, \langle e_e\rangle_T = \frac{\pi}{8c^2}\mu_0 J_s^2\omega^2\frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{32c^2}\mu_0 J_s^2 \omega^2 a^4$

7. $\frac{\|\overrightarrow{B_2}(a,t)\|}{\|B_0(\vec{r},t)\|} = \left[\rho^2\frac{\omega^2}{4c^2}\right]_{\rho=a} = \frac{a^2\omega^2}{4c^2} = 1{,}1\ \%$

$\frac{\langle E_e\rangle_T}{\langle E_m\rangle_T} = \frac{a^2\omega^2}{8c^2} \simeq 0{,}5\ \%$